Kapitel 06 - Boolesche Logik und Bitoperationen

Peter Ulbrich

AG Systemsoftware

Veranstaltungswebseite

Rückblick

- Bisher kennengelernt:
  - Binärformat
    - Wertigkeit der Bits im Binärsystem
    - Verteilung der Bits auf mehrere Bytes für Zahlen >=255
    - Verschiedene Stellenwertsysteme (Dezimal, Hexadezimal, Binär, Oktal)
  - Boolesche Operatoren
    - *AND*, *OR*, *NOT*
- Jetzt:
  - Boolesche Logik (Interpretation/Bedeutung von Binärwerten)
  - *Bitweise* Operatoren/Operationen

Rückblick - Binärformat

- Computer speichert Informationen im Binärformat:

  1 oder 0 (= genannt Bit)

- Kombination von mehreren Ziffern bildet Binärzahl: `1001`
- Jede Stelle der Binärzahl steht für eine Zweierpotenz:

  $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, \ldots$

- Beispiel
  - Darstellung der Zahl 79 `= 64 + 8 + 4 + 2 + 1`

128	**64**	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**
0	1	0	0	1	1	1	1

Rückblick - Binärformat

- Zahlen > 255 werden genauso dargestellt, bestehen aber aus mehreren Bytes
- Beispiel: 591 = 512 + 79

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1

- 591 = `0000 0010` x 256 + `0100 1111`

Rückblick - Binärformat

- Byte mit dem höchsten/niedrigsten Wert heißt *Most/Least Significant Byte* (*MSB* bzw. *LSB*)
- Reihenfolge der Bytes heißt *Byte Order*: Entweder von MSB zu LSB (*Big Endian*) oder von LSB zu MSB (*Little Endian*)
- Analog für Bits: *Most/Least Significant Bit* (*MSBit* bzw. *LSBit*)

128	64	32	16	8	4	2	1
0 (MSBit)	1	0	0	1	1	1	1 (LSBit)

Rückblick - Binärformat

- 🚨 Achtung: Zahlen können gleich aussehen, aber in unterschiedlichen Zahlensystemen stehen
- Beispiel: `110` (Binär) ≠ `110` (Dezimal)
- Unterscheidung bei gemischten Zahlensystemen über **Index**: $110_B = 6_D$
- Gibt mehrere gängige Zahlensysteme:
  - Dezimal → D oder dec
  - Binär → B oder bin
  - Hexadezimal → H oder hex
  - Oktal → O oder oct

Rückblick - Wahrheitswerte

- Ein Ausdruck, der zu `true` oder `false` evaluieren kann, heißt *boolescher Ausdruck*

Logischer Datentyp (`bool`)

- Zum Speichern von Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch
- Wertevorrat: `tru`
- Datendefinition: `bool b;`
- Zuweisung: `b = true;`

Logische Operatoren

Name	Symbol	Beispiel
		b && (x < 7)
(OR)	||	b || x > 8
Negation *(NOT)*	!	!b

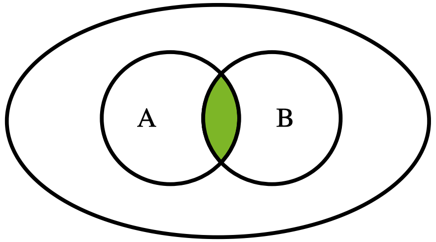
Den Umgang mit boolescher Logik lernen wir jetzt kennen!

Operatoren der booleschen Algebra

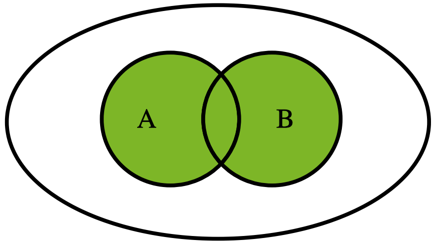
Notationen der Logikoperatoren

Operation	Bool. Algebra	C
UND	$A \wedge B$	`A && B`
ODER	$A \vee B$	`A || B`
NEGATION	$\overline{A}$	`!A`

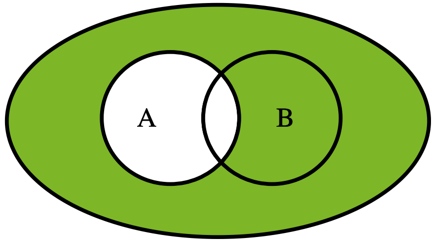
$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$



$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$



$\overline{\mathbf{A}}$

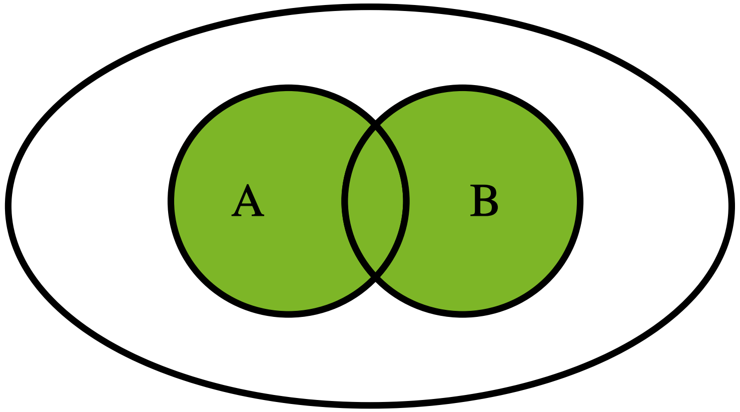


Wahrheitstabelle Oder

- *OR*: `true` , sobald **mindestens einer** der beiden Teilausdrücke wahr ist

A	**B**	$A \vee B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$

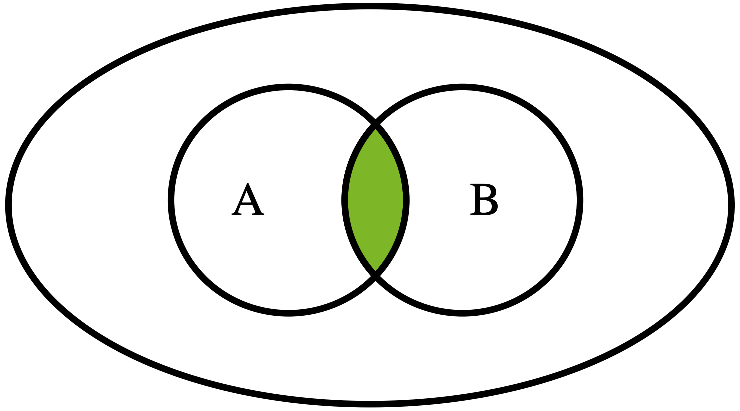


Wahrheitstabellen Und

- *AND*: `true`, sobald *beide* Teilausdrücke wahr sind

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$

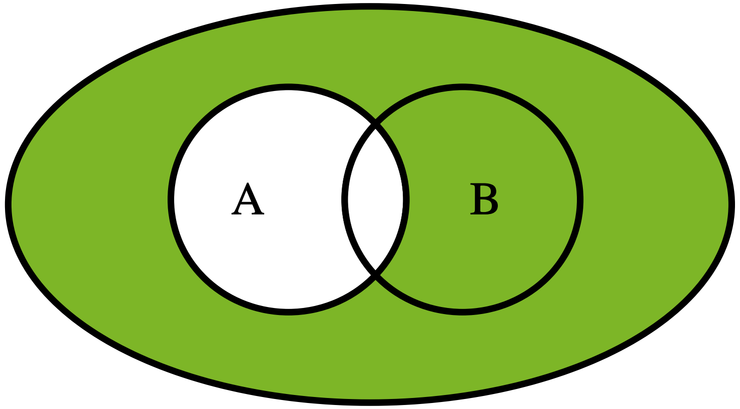


Wahrheitstabellen Negation

- *NOT*: *Gegenteil* des ursprünglichen Werts

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

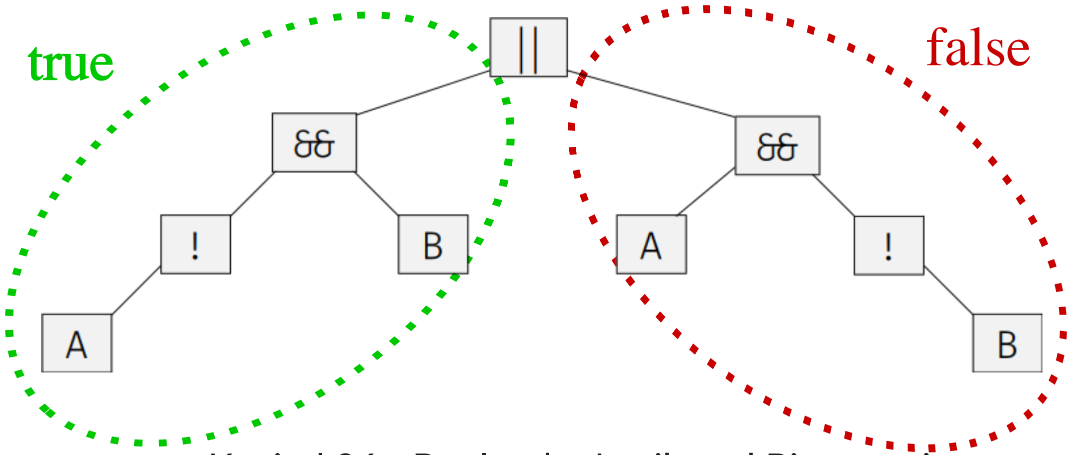
$\overline{\mathbf{A}}$



Boolesche Algebra

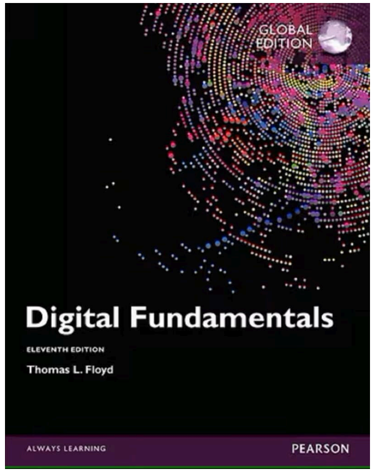
- Boolesche Ausdrücke können natürlich mehr als zwei Variablen beinhalten
  → Schrittweise Evaluierung von links nach rechts
- Setzt Klammern, um eindeutige Auswertungsreihenfolge zu erzwingen → Lesbarkeit
- Beispiel: `(!A && B) || (A && !B)`

```
bool A = false; bool B = true;
```



Regeln der booleschen Algebra

- Erlauben Umformen von booleschen Ausdrücken
- Ermöglichen Vereinfachung von langen und komplexen booleschen Ausdrücken
- Gesetze sind (meist) einfach zu verstehen
- Ergeben sich intuitiv aus der Mengenlehre
- Anmerkung: Anschauliche, vertiefende Literatur mit vielen Übungsaufgaben ist
  - *Thomas L. Floyd - Digital Fundamentals* [1]
  - Gedacht für Elektrotechniker, auf Englisch



Regeln der booleschen Algebra

Kommutativgesetz

- $A \vee B = B \vee A$
- $A \wedge B = B \wedge A$

Assoziativgesetz

- $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
- $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

Distributivgesetz

- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

- *OR* kann wie eine Addition gesehen werden

  → Alt. Schreibweise: $A \vee B = A + B$
- *AND* wie eine Multiplikation

  → Alt. Schreibweise: $A \wedge B = AB$
- Es gilt: „Punkt vor Strich“
- Erleichtert das „Rechnen“ mit booleschen Ausdrücken

Regeln der booleschen Algebra

- Darüber hinaus gelten auch noch weitere Regeln:

	Bool. Algebra	C
1.	$A \wedge 1 = A$	`(A && true) → A`
2.	$A \wedge 0 = 0$	`(A && false) → false`
3.	$A \vee 0 = A$	`(A || false) → A`
4.	$A \vee 1 = 1$	`(A || true) → true`
5.	$A \vee A = A$	`(A || A) → A`
6.	$A \vee \overline{A} = 1$	`(A || !A) → true`

Regeln der booleschen Algebra

	Bool. Algebra	C
7.	$A \wedge A = A$	`(A && A) → A`
8.	$A \wedge \overline{A} = 0$	`(A && !A) → false`
9.	$\overline{\overline{A}} = A$	
10.	$A \vee (A \wedge$	
	$\Rightarrow A(1 \vee$	
	$= A \wedge 1$	Regel 4: $1 \vee B = 1$
	$= A$	
11.	$A \vee \overline{A}B = A \vee B$	`(A || (!A && B)) → (A || B)`

Die Herleitung von Regel 11 schauen wir uns einmal als Beispiel an

Beispiel - Herleitung einer Regeln zur booleschen Algebra

Herleitung: $A \vee \overline{A}B = A \vee B$

$A + \overline{A}B$	
$= (A + AB) + \overline{A}B$	Regel 10: $A = A + AB$
$= (AA + AB) + \overline{A}B$	Regel 7: $A = AA$
$= AA + AB + A\overline{A} + \overline{A}B$	Hinzufügen von: $A\overline{A} = 0$
$= (A + \overline{A})(A + B)$	Faktorisierung
$= 1(A + B)$	Regel 6: $A + \overline{A} = 1$
$= A + B$	

Regeln der booleschen Algebra

- Ein zweites Beispiel: $(A \vee B)(A \vee C) = A \vee BC$

$(A+B)(A+C)$	
$= AA + AC + AB + BC$	Distributivgesetz
$= A + AC + AB + BC$	Regel 7: $A = AA$
$= A(1+C) + AB + BC$	Faktorisierung (Distributivgesetz)
$= A + AB + BC$	Regel 4: $1 + C = 1$
$= A(1+B) + BC$	Faktorisierung (Distributivgesetz)
$= A + BC$	Regel 4: $1 + B = 1$

De-Morganschen Regeln

- Abschließend gibt es noch zwei wichtige Regeln nach De-Morgan:

	Bool. Algebra	C
1.	$\overline{AB} = \overline{A} \vee \overline{B}$	`!(A && B) → !A || !B`
2.		`!B`

Die De-Morganschen [...] :

$$\overline{ABC} = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$$

Das war jetzt genug Theorie.
Zurück zu C!

Short-Circuiting

- In *C* gibt es einen Mechanismus namens *Short-Circuiting* für *AND* und *OR*
- Boolesche Teilausdrücke werden von links nach rechts evaluiert
- Steht Gesamtergebnis schon nach ersten Teilausdrucks fest → keine weitere Auswertung

Beispiel - *Short-Circuiting*

- *Short-Circuiting* für *OR*:

  Linker Ausdruck ist true

```
if (true || ((A && B) || !C)) {
    run_critical_function();
} else {
// ...
```

- Short-Circuiting für *AND*:

  Linker Ausdruck ist false

```
if (false && (A || B)) {
    run_critical_function();
} else {
// ...
```

Vorteile von *Short-Circuiting*

- Short-Circuiting bietet Geschwindigkeitsvorteile:

  Lohnenswert, unkomplizierte Ausdrücke als erstes zu evaluieren

- Beispiel:

```
bool a = true;
if (a || long_complicat
    do_stuff();
} else {
    // ...
}
```

Und nun betrachten wir noch die bitweisen Operationen

Bitweise Operationen

- Gleichen Operationen wie zuvor für die Manipulation von Bits
- Wichtig: **Separate** Evaluierung für **jedes Bit**
- Verkettung von Operationen auch hier möglich

(Klammern für Leserlichkeit und Operator-Präzedenzen beachten!)

Operation	**Operator**
OR	|
AND	&
NOT	~
XOR	^
Links-Shift	<<
Rechts-Shift	>>

(Bitweise Operatoren)

Bitweises Oder

- Wende *OR*-Operation separat auf **jedes** Bit zweier Zahlen an
- Mindestens ein Bit 1 → Ergebnis ist auch 1
- Nur `0`, falls beide Bits Wert `0` haben

- Beispiele:

A	B	A | B
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1
0011	1100	1111
1010	1001	1011

```
  0011  A
+ 1100  B
  ----
  1111
```

Bitweises Und

- Wende *AND*-Operation separat **jedes** Bit zweier Zahlen an
- Sind beide Bits 1

  → Ergebnis ist auch 1

- Beispiele:

A	B	A & B
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1
0011	1100	0000
1010	1001	1000

A 1010
B 1001
1000

Bitweise Negation

- Invertiere den Wert jedes Bits einer Zahl

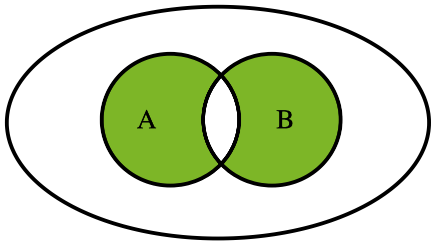
- Beispiele:

A	~A
0	1
1	0
0011	1100
1010	0101

Bitweises exklusives Oder

- Ist **genau ein** Bit 1 → Ergebnis ist 1
- Anders ausgedrückt:

  Bei Vereinigung zweier Mengen darf ein Element nur in **einer** Menge existieren
- Häufige Notation: $A \oplus B$
- *XOR* ist reversibel: $(A \oplus B) \oplus B = A$



A 1010
B 1001
0011

- Beispiele:

A	B	A ^ B
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0
0011	1100	1111
1010	1001	0011
0011	1001	1010

Anwendung des exklusiven Oders

- Exklusives Oder ist sehr nützliche und viel benutzte Operation
- Beispiel Kryptographie
  1. Passwort P in Bitmuster übersetzen und abschnittsweise auf Text T anwenden
     → Nicht lesbares Ergebnis $T \oplus P$
  2. Entschlüsselung: $(T \oplus P) \oplus P = T$
- Hamming-Distanz: Bestimmung der Anzahl verschiedener Bits
- Hashing: Erzeugen einer eindeutigen Signatur (Zwischenschritt, z.B. SHA-3)

Key	Werte
3	102
17	98
8	35

0 10 20 30 40

000000 001010 010100 011110 101000

2 4 3 4 ⇒ min

Beispiel - Exklusives Oder

- Verschlüsselung mit fester Passphrase

C Run ▶

```c
#include <stdio.h>

int main() {
    int msg = 0x07; // 0000 0111
    int passwd = 0xAA; // 1010 1010
    int enc = msg ^ passwd; // 1010 1101
    printf("%#X\n", enc);
    // Umkehren zu Klartext
    enc ^= passwd; // 0000 0111
    printf("%#X\n", enc);
    return 0;
}
```

Bitschieben - *Shifting*

- Verschieben des gesamten Bitmusters um n Bits nach links bzw. rechts
- Bei fester Bitbreite
  - Links-Shift: n MSBits entfernt
  - Rechts-Shift: n LSBits entfernt
- Mathematisches Äquivalent
  - Links-Shift: Multiplikation um 2^n
  - Rechts-Shift: Division durch 2^n mit Abrundung

- Beispiele:

A	n	A << n
0010	0	0010
0010	1	0100
0010	2	1000

A	n	A >> n
0101	0	0101
0101	1	0010
0101	2	0001

Beispiel - *Bit Shifting*

- Was ist das Ergebnis (GCC-Compiler)?

cpp Run ▶

```cpp
#include <stdio.h>
int main() {
    int i = 0x1;                    // 0001
    printf("%d, %x\n", i, i);
    printf("%d, %x\n", i << 31, i << 31);
    return 0;
}
```

A: Undefiniertes Verhalten

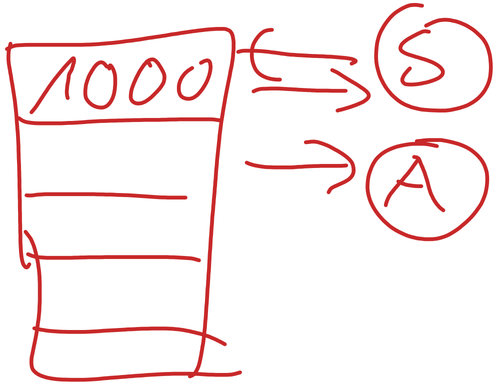
B: 0

C: -2 147 483 648 (INT_MIN)

D: -1

Bitmanipulationen

- Häufiger Anwendungsfall: **Gezielte** Manipulation eines oder mehrerer Bits
- Beispiele:
  - Hardwareprogrammierung
    - Einzelne Bits eines Speicherregisters stehen für verschiedene Funktionen (*Flags*)
    - Aktivierung über Setzen des Bits(*An-Aus-Schalter*)
  - Kommunikation
    - Nachricht mit fester Byte-Länge
    - Informationen sind an fester Stelle hinterlegt
- Etablierte Muster: Setzen (*Set*), Löschen (*Clear*), Flippen (*Toggle*) und Prüfen (*Check*)



Bits setzen

- Setzen eines Bits ist unkompliziert über die *OR*-Operation möglich
- In Kombination mit Links-Shift: Setzen eines beliebigen Bits

cpp Run ▶

```cpp
#include <stdio.h>
int main() {
    int bit_pattern = 0x07;                    // 0111
    bit_pattern = bit_pattern | (1 << 3);
    printf("%#01x\n", bit_pattern);
    return 0;
}
```

| 1000

1111

Achtung: Wegen Operator-Präzedenz Klammern beachten!

Löschen eines Bits

- Löschen eines Bits geschieht mithilfe von Links-Shift, *AND* und *NOT*
- Idee
  - Links-Shift einer `1` bestimmt das Bit
  - Negierung des Ergebnisses → nur ein Bit mit `0`
  - Anwenden mit *AND*

Beispiel - Löschen eines Bits

Beispiel: Bit 2 soll gelöscht werden

1. Links-Shift um 2 mit `(1 << 2)`

   Bitmuster: `...0 0100`

2. Negierung: `~(1 << 2)`

   Bitmuster: `...1 1011`

3. *AND*: `bit_pattern & ~(1 << 2)`

Beispiel - Löschen eines Bits

cpp Run ▶

```
#include <stdio.h>
int main() {
    int bit_pattern = 0x07;                    // 0111
    bit_pattern = bit_pattern & ~(1 << 2);
    printf("%#01x\n", bit_pattern);
    return 0;
}
```

1011

0011

Umkehren eines Bits

- Umkehren (*Flip*) eines Bits: Links-Shift in Kombination mit *XOR*

cpp Run ▶

```
#include <stdio.h>
int main() {
    int bit_pattern = 0x07;                    // 0111
    bit_pattern = bit_pattern ^ (1 << 1);
    printf("%#01x\n", bit_pattern);
    return 0;
}
```

0010

0101

Überprüfen eines Bits

- Überprüfen eines Bits: Links-Shift in Kombination mit *AND*

cpp Run ▶

```cpp
#include <stdio.h>
int main() {
    int bit_pattern = 0x07;                          // 0111
    printf("Is set: %#01x\n", bit_pattern & (1 << 0));
    return 0;
}
```

& 0001
0001

Überprüfen eines Bits

- Überprüfung darf auch als Bedingung verwendet werden

cpp Run ▶

```
#include <stdio.h>
int main() {
    int bit_pattern = 0x07;                              // 0111
    if (bit_pattern & (1 << 0)) {
        printf("Bit 1 is set\n");
    } else {
        printf("Bit 1 is not set\n");
    }
    return 0;
}
```

Typische Verwendung von Bitoperationen

- Szenario
  - Senden von Nachricht mit fester Länge
  - Informationen sind fester Stelle der Nachricht zu hinterlegen
- Beispiel
  - 64 Bit lange Nachricht
  - Bits 16-23 kodieren gemessene Temperatur

Typische Verwendung von Bitoperationen

cpp Run ▶

```cpp
#include <stdint.h>
#include <stdio.h>

int main() {
    uint64_t message = 0x0;
    uint32_t temperature = 33;                          // 100001
    message |= (temperature << 16) & 0xFF0000;
    printf("temperature = %#01x, message = %#011x\n",
        temperature, message);
    return 0;
}
```

Byte-Reihenfolge (*Endianness*)

- Beschreibt Reihenfolge, wie Bytes im Speicher abgelegt werden
- Ausgangssituation: Eine Zahl mit mehreren Bytes → z. B. `int`, 4 Bytes
- Big Endian

32	16	8	4	2	1
0 (MSBit)	0	1	1	1	1 (LSBit)

- Little Endian

1	2	4	8	16	32
1 (LSBit)	1	1	1	0	1 (MSBit)

Byte-Reihenfolge (*Endianness*)

- Warum existiert diese Unterscheidung?
  - *Big Endian* ist intuitiver (Abbildung wie „ klassische “ Zahlen)
  - *Little Endian* erlaubt eine einfachere Umwandlung in Datentypen anderer Größe
- Beispiel Little Endian

Byte 0	**Byte 1**	**...**
`0x07`	`0x01`	...

- Bei Interpretation bei Zahl als 1 Byte und als 2 Bytes:

  → Start bei gleicher Speicher-Adresse (Bit 0 in Byte 0 → „ganz links“)

Relevanz der Byte-Reihenfolge

- Verschiedene Prozessorhersteller legten für Produkte eine Reihenfolge fest
- Alternative Bezeichung
  - Motorola-Reihenfolge (*Big Endian*)
  - Intel-Reihenfolge (*Little Endian*)
- Intel, AMD (CPUs für Desktop/Laptop) → Little Endian
- ARM (Mobile/Mikrocontroller) → Unterstützen beides
- Keine Sorge: Compiler übernimmt **automatisch** die Konvertierung

  → Wir müssen (erst mal) nichts tun! 😀

Zusammenfassung

- Komplexe Zustände mit Boolesche Algebra ausdrücken
- Boolesche Operationen für die praktische Umsetzung beim Programmieren
- *Short-Circuiting* vereinfachen Evaluation von booleschen Ausdrücken
- Bitweise Operationen erlauben Zugriff auf einzlene Bits Binärzahl
- Bitoperationen für das Bearbeiten von einzelnen Bits als unerlässliches Werkzeug
- Byte-Reihenfolge: Wichtig für verschiedene Anwendungszwecke

Referenzen

[1] T. L. Floyd, *Digital Fundamentals, Global Edition*, 11. Aufl. London, England: Pearson Education, 2014.